1 [26a] 1

115|53 Bull. A. Cr. 1904 p. 371-84

Sur la formation de veines d'afflux dans les liquides.

Un des phénomènes les plus ordinaires, et trop peu étudiés néanmoins ~~cependant~~ (de l'hydrodyn.) c'est la formation ~~des veines~~ d'une veine d'afflux lorsqu'un liquide passe par un petit orifice avec ~~vélocité~~ suffisante. On se peut s'expliquer encore ~~Ce fait pourrait être expliqué~~, lorsque le liquide en traversant ~~sort~~ par une ouverture dans le fond d'un vaisseau sort dans l'air ambiante par l'action des forces de gravité et de tension capillaire, qui ont la plus grand influence sur la forme du jet ~~déterminent la forme et le mouvement du jet après avoir quitté l'orifice~~ et qui peuvent causer même sa dispersion en gouttelettes.

Mais aussi ~~un phénomène identique~~ pourtant le liquide y forme ~~en formant~~ une veine au lieu de s'épandre dans toutes les directions, lorsque l'espace extérieur est rempli du même liquide (seulement rendu visible par une différente coloration) ~~et le même~~ où ces forces ne peuvent pas opérer ~~peuvent~~ jouent aucun rôle, et le même phénomène est bien connu en aéromécanique (colonne de fumée, jet de vapeur). L'interprétation de ces phénomènes d'après l'hydrodynamique

A première vue ~~on ne voit pas moyen d'expliquer ces phénomènes par les lois de~~ ~~Il paraît que l'hydrodynamique~~ des liquides idéales paraît impossible ~~ne peut pas expliquer ces phénomènes~~, puisque lors ~~d'après elle~~ la distribution des lignes des flux devrait être ~~serait~~ analogue à celle des courants électriques, ~~dans un conducteur~~ qui tendent ~~au contraire~~ à remplir ~~s'épandre dans~~ toute ~~la masse~~ l'étendue ~~en contradiction~~ du corps conducteur. Cependant Helmholtz a établi une différence importante ~~qui a donné la différence~~ de ces deux cas, qui consiste dans une condition supplémentaire ~~additionnelle~~ de l'hydrodynamique: c'est-à-dire ~~à savoir~~ que la pression absolue ne peut nulle part s'abaisser au-dessous de zéro ~~atteindre une valeur inférieure~~ ~~zéro~~,

~~M~~ Le dépassement de cette limite engendrerait une

aboutissant à

puisque la transgression de cette limite produirait une rupture qui causerait

la formation

~~and~~ La naissance d'une surface de discontinuité.

~~Mr~~ ~~Mr~~ Des telles surface de discontinuité ~~se~~ devraient ~~[illegible]~~ prendre

Or, la théorie exige que

~~naissant de chaque~~ ~~[illegible]~~ effilée pointue ~~[illegible]~~ la vélocité du

donnée ~~[illegible]~~ où l'abaissement de ~~[illegible]~~ la formule

liquide, qui ~~est tiré donc~~ la pression ~~par~~ par ~~la rotation~~ f...

diotienne à chaque arête pointue / ~~il résulte qu'il y devrait prendre~~

~~[illegible]~~ infinie, ~~ce qui peut être démontré facilement pour les~~

~~M~~ Il en résulte ~~la formation~~ de telles surfaces de discontinuité dans ces endroits

~~[illegible] des [illegible]~~ naissance ~~à chaque~~ ~~toutefois des telles surfa~~

(toutefois)

Helmholtz s'imagine

Dans le cas mentionné ~~on se le~~ il faut s'imaginer, d'après Helm

au bord

que le liquide se fend ~~à la surfa~~ de l'orifice, et que ~~la~~

~~sépa~~ ce que nous appelons veine d'efflux ~~est la~~ ~~est produit par~~

la surface de discontinuité, où la pression est zéro, produit en

séparant les parties centrales animées d'un mouvement rapide, ~~des parties~~

de l'eau dormante à l'extérieur

~~du reste~~ du liquide stagnant, en dehors.

Cette théorie (dans le cas de deux dimensions)

des variables

en donnant lieu à l'emploi très élégant des fonctions complexes

a été le point de départ d'une quantité de recherches sur des formes

~~et s'est développé dans un domaine nouveau de l'hydrodynamique classique~~

sans doute

spéciales des veines (très intéressantes ~~sous~~ au point de vue mathématique

considérable

(qui forment ~~tout~~ un domaine ~~[illegible]~~ de l'h. classique

sur lesquelles elle repose

hypothèses ~~qui lui servent~~

essayé

Mais il paraît qu'on n'a jamais de vérifier ~~les fondamentales~~

~~de cette théorie~~ d'une façon expérimentale.

C'est nécessaire d'autant plus

été

Et, il faut remarquer ~~qu'elles ne sont~~ pas été acceptée sans contradiction

que cette théorie n'a

Au lieu de dépasser cette limite ~~il se produirait~~ le liquide se déchirerait et ~~il s'y produirait une~~
la rupture engendrait une surface des deux-...

En effet, ~~l'hypothèse~~ la supposition des surfaces de discontinuité ~~où une partie du liquide glisse sur l'autre, animée d'une vitesse différente~~ où deux parties du liquide à vitesses différentes sont en contact (quoique ~~légitime~~ justifiée dans le cas des liquides idéales), est ~~absolument~~ inadmissible pour les liquides réels, doués d'une certaine viscosité, puisque les tensions tangentielles y ~~devraient devenir~~ deviendraient infinies.

~~On en pourrait faire usage avantageux quelquefois comme d'une fiction mathématique~~

On ne peut que la regarder comme une fiction mathématique, dont l'usage quelquefois peut être ~~peut offrir quelques~~ avantageux (d'ailleurs ~~mais~~ pourvu) qu'on ait prouvé que les conséquences ne sont pas de nature fictive, eux aussi. [n'ont une valeur fictive]

~~Mais ce qui me paraît le plus important c'est que~~

Et ~~c'est~~ surtout, la supposition des liquides idéals s'écarte de la réalité dans un détail de la plus grande importance, ~~ce qui est plus important~~ en admettant un glissement parfait le long des parois du vaisseau et de l'orifice, tandis que les liquides réels y forment une couche adhérante immobile.

D'autre part, ~~comme j'ai démontré dans ..~~ les équations ordinaires des fluides ~~visqueux~~ ~~tenant~~ si l'on tient compte de la viscosité sont suffisantes pour prouver la nécessité ~~d'avoir~~ du phénomène caractéristique en question : de l'asymétrie des lignes de flux, par rapport à la ~~surface~~ parois de séparation.

Lorsque le mouvement est assez lent pour ~~négliger~~ permettre l'omission des termes du second degré ~~dans~~ (les équations du mouvement) par rapport aux vitesses en comparaison avec ceux du premier degré

~~Elles~~ ne ~~changent pas~~ ~~sont~~ sont pas changées par la substitution de au lieu de

c'est à dire les lignes de flux ne changeant pas de forme (seulement de direction) par suite d'une inversion des différences de pression, et par conséquent elles doivent être symmetriques des deux cotés de l'orifice, pourvu que les parois ~~[illegible]~~ soient symmetriques.

Mais à mesure ~~que la vitesse se~~ d'accroissement des vitesses ~~d'~~les termes d'inertie gagnent d'importance, la substitution mentionnée cesse d'être ~~[illegible]~~ applicable et le mouvement devient assymétrique.

Il est facile, d'ailleurs, de parvenir à la conclusion que ~~ces phénomènes~~ ~~produiront un changement de forme~~ le ~~[illegible]~~ résultat sera une tendance au changement du mouvement dans le sens indiqué au commencement des phénomènes en question.

Or l' ~~[illegible]~~ étude expérimentale exposée ci-dessus: ~~[illegible]~~ de cette étude était le but de trancher d'après notre supposition la question si c'est l'effet de l'inertie et de la viscosité, ou ~~bien~~ si c'est la formation de surfaces de rupture ~~[illegible]~~ d'après Helmholtz, ~~dans les endroits où la pression est zéro, à pression zéro,~~ qui produit le ~~[illegible]~~ phénomène des veines ~~[illegible]~~ d'efflux.

Les expériences étaient basées sur la méthode bien connue, ~~d'étudier le mouvement du liquide les lignes de flux en y laissant~~ ~~faisant~~ de faire entrer une matière colorante dans un certain point du liquide en mouvement, ce qui ~~rend visible~~ permet d'observer et de ~~[illegible]~~ copier reproduire la ligne de flux qui y passe ~~y prend dès ce point~~. et de la copier.

Je choisis ~~Comme cas~~ l'exemple le plus simple et le mieux défini : l'efflux par une ouverture dans une paroi mince. Cette paroi était représentée par une feuille de cuivre dur

~~#~~ l'épaisseur) ~~qui formait séparant~~ séparant les deux parties d'un tube en verre (diamètre) ~~[illegible]~~ dont les ~~extrémités~~ bases, aplanies et polies, y étaient ~~[illegible]~~ attachées avec de la cire à cacheter ~~étaient aplanies et collées sur elle~~. L'ouverture, ~~centrale~~ au centre de la feuille qui ~~permettait le passage du liquide~~ était traversée par le liquide avait une forme circulaire (diam) ; ses bords étaient arrondis.

Les extrémités opposées des tubes étaient fermées par des bouchons, ~~[illegible]~~ avec des ~~deux~~ des tuyaux d'entrée et de décharge, dont l'un était construit d'une façon spéciale, avec une pointe percée à l'intérieur d'un ~~tout petit trou~~, ce qui avait pour but ~~d'obtenir le mouvement comme il était nécessaire d'employer des vitesses très petites~~ de réduire les vitesses ~~[illegible]~~ valeurs très petites ~~[illegible]~~ exigées dans les expériences (comme nous verrons plus loin.) ~~Les vitesses~~ On produisait ~~la~~ les vitesses choisies ~~étaient déterminées par la hauteur du réservoir~~ ~~pouvaient être choisies~~ en élevant le réservoir ~~à~~ aux hauteurs convenables ~~par moyen de~~ au-dessus des ~~appuis du~~ tuyau de décharge, ~~[illegible]~~ leurs ~~ces~~ valeurs résultaient du nombre des gouttes ~~qui y formaient~~ qui s'y écoulaient ~~s'écoulantes~~ et de leurs poids moyen, ~~déterminé~~ ~~et~~ ~~qui pouvait être réduites à moyen de la~~ obtenu par une détermination ~~spécialement~~ spéciale. ~~par détermination d~~

L'introduction de la matière colorante se faisait par moyen ~~d'un~~ du tube ~~[illegible] et~~ terminé par un ~~tube~~ allongement capillaire de ~~finesse~~ minceur extrême, et guidé dirigé ~~[illegible]~~ par moyen d'un anneau presse-étoupe et d'une boîte hermétique de telle façon que le point, d'où sortait la matière colorante, pouvait être plus ou moins approché à la paroi de séparation et ~~au même temps~~ en permettant en ~~prenant~~ adoptant, en outre, une certaine situation latérale voulue ~~[illegible]~~ ~~en conséquence~~ d' ~~[illegible] et le rotatoire du tube pouvait~~ permettait d'un mouvement rotatoire ou du tube.

Le liquide colorant y ~~sortait~~ entrait en quantités très petites, extrêmement pour éviter l'influence sur les lignes de flux, ~~[illegible]~~ par suite de la pression hydrostatique ~~exercée par~~ ~~[illegible]~~ d'un petit réservoir situé plus haut. ~~ce qui était effectué~~ ~~La substance employée~~ C'était de l'encre bleu ordinaire (—) (mais filtré avec soin) dont je faisais usage ~~que j'employais~~ pour ces expériences; sa densité était mesurée et ~~[illegible]~~ ~~la densité~~ celle de l'eau employée y était égalisée par l'addition d'une petite quantité de sel ---

La ~~situation~~ de l'appareil était telle que le point et le milieu de l'ouverture se trouvait au même niveau ; par conséquent la ligne de flux colorée s'étendait de dans le verseau ~~formant~~ était contenue dans une ~~surface~~ plaine horizontale, et dans la même position se trouvait son image produit sur la table, ~~par moyen~~ ~~incidents~~ (réfléchissant les rayons incidents perpendiculaire sur) ~~au~~ d'un miroir incliné et ~~d'~~un prisme à réflexion totale.

On avait choisi cette disposition puisqu'alors ~~l'effet~~ les courants de convection verticals ~~étaient son minimum~~ produisent les moindres distributions qui, en plus, peuvent toujours être controlées en observant ~~combien~~ si la ligne de flux est bien horizontale. Les courants ~~produits~~ engendrés ~~de trouble~~ par des variations de la température environnante causent bien d'ennui lorsque la vitesse du ~~courant~~ liquide est petite. ~~Il~~ Pour diminuer leurs effets il fallait envelopper l'appareil d'un large tube en verre manchon rempli ~~d'eau~~ chaque fois avec le même liquide que ~~le tube~~ le vaisseau intérieur. Ces difficultés disparaissent, d'ailleurs, pour la plupart avec l'emploi des liquides plus visqueux, ~~surtout~~ d'autant plus qu'il y faut employer (comme nous verrons plus loin) ~~certains cas~~ des vitesses plus grandes.

Outre ~~ça il n'y avait que quelque embarras~~ ces précautions il ~~faut~~ fallait prendre soin ~~~~ d'une purification extrêmement complète des liquides ~~purifiés~~ employés ~~parfaite~~, puisque la moindre ~~~~ particule de poussière suffisait à égorger la capillaire ~~et~~ ou l'ouverture et dans des expériences à pression diminuée mentionnées plus loin, de ~~~~ la fermeture hermétique de toutes les pièces (jonction) partie du conduit appareil du contact hermétique

$\frac{\rho\alpha}{\mu\kappa}\frac{\rho}{\mu}$

Les résultats expérimentaux sont condensés dans le résumé suivant :

1). On observe la formation distincte des veines d'efflux, c'est à dire une diminution dans la divergence des lignes d'efflux, avec des vitesses très petites (0'5 m/s vitesse moyenne dans l'ouverture pour l'eau). De plus, la vitesse [qui peut être jugée d'après l'épaisseur du filament coloré (en raison inverse) ou directement en observant le moment d'une série de images produits encore en produisant colorés par des secousses périodiques,] paraissait maximale dans l'axe de la veine et diminuait vers les parois, tandis que l'inverse aurait dû se passer d'après Helmholtz avec une valeur critique de la vitesse, nécessaire pour surmonter la pression atmosphérique et pour former la veine de 14 m/s

2). Les calculs de Helmholtz et de ses successeurs ne s'appliquent qu'au cas le plus simple : des parois infiniment minces et des arêtes absolus mathématiques.

En réalité on devrait s'attendre, eu égard à la courbure finie des bords de l'orifice, à trouver une vitesse critique séparant les cas où l'efflux est normal, et analogue au flux d'électricité, et celui où il y a formation de la veine. la rupture du liquide et la formation de la veine a lieu.

Les expériences n'en ont rien indiqué, au contraire, le changement de la forme des lignes d'efflux avec vitesse croissante était tout à fait continu.

C'est ce qui résulte de la figure où la ligne de flux sortant d'un point latérale P est tracée pour quelques valeurs de la vitesse.

L'influence graduelle de la vitesse sur la partie située en aval de l'ouverture est surtout évidente tandis que les différences de la partie en amont étaient si petites que le dessin ne les accuse pas.

En concordance avec nos remarques sur l'importance relative de l'inertie et de la viscosité l'asymétrie s'accuse à mesure d'accroissement de la vitesse tangentielle, la courbe obtenue avec la moindre vitesse est presque symétrique et il s'approche

Cette disparition de la symétrie et concentration graduelle des lignes d'afflux dans la veine ressort d'une façon plus nette encore dans les figures

Elles sont le résultat d'une série des dessins obtenus par superposition des différentes lignes produites par une vitesse donnée.

Un détail remarquable c'est la formation des tourbillons annulaires, entourant la veine centrale, développés très nettement surtout dans la figure qu'on pouvait obtenir par inversion du courant ainsi que le point P se trouvant du coté de la veine d'afflux.

Elle donne le moyen de définir ce qu'on peut appeler surface de la veine,* c'est à dire : la surface qui sépare les lignes de flux provenant de l'espace... et des lignes closes tourbillonaires, en prenant origine au bord de l'ouverture .... Donc c'est évident que le liquide environnant participe au mouvement de la veine, quoique avec vitesse inférieure et rien n'indique l'existence d'une discontinuité de vitesse.

Ces tourbillons vanissent rapidement avec diminution de vitesse, la fig. montre encore la convergeance caractéristique des lignes de flux en aval de l'ouverture mais dans le cas représenté par la fig. limite où il n'y a plus qu'une trace d'asymétrie, rien n'en pouvait être découvert

*) Qu'il me soit permis de

9

3). Puisque, d'après Helmholtz, la naissance de la discontinuité dépend de la condition que la pression aux bords de l'orifice s'abaisse à zéro, (la pression extérieure dans l'espace ... il en résulte que la vitesse critique devrait satisfaire) ...

et par conséquent, que les phénomènes en question se produisent à des vitesses d'autant plus petites que la pression extérieure est moindre.

Pour examiner la réalité de cette conclusion je faisais communiquer le réservoir primaire du liquide, le tuyau de décharge, et le petit réservoir de matière colorante avec un vaisseau d'où l'air pouvait être enlevé, évacué par moyen d'une trompe à eau. De cette manière la valeur absolue de pression pouvait être diminuée à volonté, sans changement des différences rélatives.

Or, des expériences répétées dans diverses circonstances, avec abaissement de la pression p_2 de 75 cm à 7 cm de mercure, n'ont indiqué aucun changement dans la forme des lignes de flux, ce qui nous force à rejeter définitivement l'applicabilité de la théorie de Helmholtz aux phénomènes en question.

4). Dans cette théorie, ce n'est que la densité du liquide qui entre au calcul, en ayant une influence sur la pression hydrodynamique, le degré de viscosité est indifférent. D'après notre hypothèse, au contraire, c'est le rapport de la densité à la viscosité, la fluidité, qui détermine la forme du mouvement.

Si l'on connait une solution particulière des équations ... pour un liquide caractérisé par les coefficients μ ρ on satisfait aussi, pour un autre liquide, à coefficients $\mu_2 \rho_2$, en choisissant $u_2 = u_1$. $\Delta p_2 =$

c'est à dire qu'on aura un mouvement ~~donné~~ à simultanéité dynamique avec le premier.

Par conséquent, si notre ~~hypothèse~~ explication du phénomène des veines est exacte, la forme des lignes ~~doit~~ dépendra de la viscosité, mais elle sera la même dans les différents liquides pour des vitesses choisies en raison inverse de leur fluidité, ~~ce~~ qui exigeront l'emploi des pressions ~~pro~~ proportionnelles à l'inverse du produit de la fluidité et

En effet, cette règle a été vérifiée amplement ~~par~~ par l'emploi ~~en faisant usage~~ ~~(entre l'eau)~~ ~~entre~~ deux (entre l'eau) de ~~des~~ solutions de glycérine ~~de~~ ~~en~~ de ~~différentes concentration~~, et des colorants mêlés avec ~~la même~~ cette substance, ~~jusqu'à~~ jusqu'à l'égalisation des densités ~~égal~~.

~~Voici~~ Les valeurs relatives des coefficients de viscosité ~~étaient~~, mesurés par la méthode ordinaire de Poiseuille :

Glycérine I densité ce qui correspond à la raison composition du mélange

Les expériences ~~enquestion~~ s'accordaient si bien qu'on pouvait superposer les systèmes des courbes obtenues avec vitesses correspondantes. Ainsi la fig. était obtenue dans l'eau avec la vitesse , dans la solution avec la vitesse , d'où résulte la raison des vitesses en accord parfait avec le nombre de simultanéité D'autrepart la vitesse (où en ~~tenant compte de~~ égard à la différence de densité :) qui d'après la théorie de H. devrait correspondre à la fig. ~~produisait~~ produit une ~~système~~ image tout-à fait différente, intermédiaire entre les fig. et

De même l'identité de la fig. obtenue avec des vitesses correspondantes dans les trois relations a été constatée, et [illegible] donc s'applique à [illegible] qui ne sont pas reproduites.

En traçant la fig. j'ai tiré profit ~~fait usage à [illegible]~~ de cette similarité dynamique en faisant usage de l'image résultant de la vitesse correspondante dans glycérine II, puisque l'effet des courants de convection ~~[illegible]~~ (pour ce moment lent se) faisait sentir dans l'eau ordinaire à un tel degré qu'on ne pouvait ~~[illegible]~~ tracer ~~les parties ant.~~ que les parties antérieures et moyennes des lignes.

~~Je me permettrai~~ J'ajouterai en parenthèse que ce semble être la première vérification expérimentale de l'identité géométrique des mouvements semblables. Aussi les déterminations approximatives des pressions s'y accordaient à la règle ... mais ~~je n'entrerai pas dans~~ nous n'entrerons pas dans ~~ce sujet comme~~ les détails, qui n'ont pas de portée directe pour ~~sur~~ le sujet principal.

Pendant que les faits exposés plus haut prouvent d'une façon évidente que la formation des veines liquides est causée par l'inertie et la viscosité, d'autre part l'idée fondamentale de Helmholtz : l'abaissement de la pression à l'orifice et la possibilité d'une rupture du liquide, semble être bien raisonnable, c'est même de cette façon que nous expliquons le fonctionnement des tromps à eau et il paraissait désirable de pousser l'étude expérimental plus loin, vers les vitesses grandes, qui pourraient où telles phénomènes se pourraient produire.

Comme le dispositif décrit plus haut ne s'y prêtait pas, je construisis un appareil très simple et robuste : c'est-à-dire un tube en verre (diam) rétréci au milieu de telle façon qu'il n'y restait qu'une ouverture étroite, [dont les dimensions, déterminées à la fin sur la coupe transversale du tube aplanée par polissage étaient de]. qui était muni dans sa partie supérieure d'un petit tube latérale servant à l'introduction du colorant, ou à la communication avec un manomètre.

D'abord, pour examiner les petites vitesses, ce tube fut mis en communication, avec d'un diaphragme .... et avec un réservoir d'eau à niveau plus élevé, causant une petite différence de pression. Les lignes de flux coloriées mettaient en évidence les traits caractéristiques de la veine à des vitesses si petites que 6·1 cm/s dans le canal (c'est-à-dire la vitesse de

Pendant que l'asymétrie était disparue, au contraire avec 8·3 il s'y formait

une veine cylindrique longue de , entourée de tourbillons, et sujette à des petits changements oscillatoires ~~petites oscillations périodiques~~

Évidemment, ~~avec des vitesses si petites et avec~~ eu égard à la ~~pet~~ lenteur du mouvement et à la petitesse de la courbure ~~insignifiante~~ des parois, il ne peut pas être question des phénomènes de Helmholtz, et pourtant la veine ~~caractéristique~~ se forme ~~infinie~~.

En suite ~~cet appareil était~~ ce tube fut attaché ~~avec son extrémité~~ immédiatement au conduit d'eau (de pression 3,5 atm) pendant que l'extrémité inférieure communiquait avec ~~une bouteille~~ un vaisseau — servant à mesurer la vitesse d'afflux — où la pression pouvait être ~~abaissée~~ ~~diminuée~~ réduite par une trompe à eau.

~~Avant~~ Avant tout le tube fut rempli d'eau dans toute sa longueur. ~~Lorsque~~ Et alors le robinet fut ouvert, et il y apparaissait en réalité pour une certaine vitesse le phénomène expecté : ~~la rupture de~~ la veine d'eau ~~se~~ se déchirait ou bien se détachait ~~en passant par~~ en quittant le ~~canal~~ rétrécissement du liquide environnant ~~immédiatement après avoir passé l'orifice~~ ce qui était visible par suite de la formation des surfaces réfléchissantes à l'intérieur. Mais le phénomène n'était pas du tout permanent, ~~son~~ son caractère ~~oscillatoire~~ périodique intermittent ~~était~~ s'accusait par un bruit bourdonnant, aussi ~~voyait on~~ apercevait on souvent des interruptions et, en général, une considérable irrégularité du phénomène.

En réglant l'afflux d'eau de façon convenable on pouvait évaluer la valeur approximative de la vitesse critique où ce phénomène apparaissait à 17,6 ... c/s(?) ... dans l'ouverture, ~~pendant~~ tandis que la relation exigerait une vitesse de pour ~~[illegible]~~ pouvoir la pression de l'abaissement de à zéro.

Et lorsque la pression extérieure p_2 fut diminuée à 35 par moyen de la trompe d'eau, le phénomène se produisit dès que la vitesse 14 était atteinte, pour la pression de 255 à une vitesse de 12, ce qui correspond aux valeurs théoriques 9,7 et 8,2.

En même temps l'aspect du phénomène change : avec la pression atmosphérique l'eau — toute claire jusqu'au moment où la vitesse critique est atteinte — devient trouble au delà, ce qui provient de dégagement d'une quantité de toutes petites bulles d'air, mais avec l'emploi des pressions basses il s'y forment des bulles grandes, une comme dans de l'eau bouillante.

On pourrait expecter que la vitesse d'afflux sera indépendante de la pression intérieure p_1 pourvu que la vitesse critique soit atteinte puisqu'alors la pression auprès de l'orifice aurait toujours la même valeur zéro. Mais cette conclusion n'a pas été vérifiée par l'expérience, au contraire, on constatait toujours un accroissement de vitesse par suite d'augmentation de la pression p_1.

Les causes de cette divergence et des différences entre les valeurs calculées et observées des vitesses critiques sont sans doute les mêmes : le caractère instable, oscillatoire du phénomène d'une part et d'autre part la viscosité du liquide qui défie tous les calculs basés sur l'abstraction des liquides idéals.

méprise
se moque de

Nous résumerons les conclusions ~~de ces expériences~~ définitives de ces expériences:

Le phénomène de Helmholtz, c'est à dire la rupture du liquide déchirement de la masse liquide quittant une ~~ouverture~~ petite peut avoir lieu, en vérité, si la vitesse dépasse une valeur considérable (1[illegible] dan.. mais c'est un phénomène secondaire qui n'a rien à faire avec la formation des veines d'efflux mêmes, qui peut commencer ~~pour~~ à des vitesses quelques centaines de fois ~~plus que cent fois~~ plus petites.

La théorie de H. est sans doute très intéressante sous point de vue théorique, puisqu'elle démontre la possibilité de tels phénomènes dans des liquides idéals, mais son application aux liquides réels n'est nullement justifiée, même pour de telles vitesses, ce que démontre le fait de l'intermittence du phénomène et le désaccord ~~des valeurs~~ du calcul ~~et de~~ des vitesses, et de l'observation directe ~~vitesses calculées et obser~~

Il paraît que c'est un cas analogue au mouvement ~~stationnaire~~ permanent des corps plongés dans un liquide, où les calculs basés sur l'idéalité des liquides et ne tenant ~~pas~~ ni compte de la dissipation d'énergie ~~et~~ ni de l'adhésion aux parois, aboutissent à ~~entraînent~~ des conclusions tout à fait ~~erronées~~ incorrectes.

En outre, il faut remarquer que les solutions spéciales trouvées d'après cette th... dans les travaux mentionnés au commencement, exigent tous ~~une~~ des valeurs définies de vitesse d'efflux pour une pression p_2 (~~dans~~ (à l'aval de l'~~ouverture~~ orifice) donnée et ne répondent pas à la question qu'est ce qu'il y arrive si cette vitesse change par suite de changement de la pression p_1 (en amont de l'orifice)

~~Il~~ Je doute s'il ~~at~~ ~~ait~~ aurait lieu dans l'eau ~~dont~~ dont tout trace d'air a été enlevée

~~Sans doute~~ Ceci est lié aux phénomènes des mouvements turbulents et à la formation des sons dans les!

Quant à la formation des veines d'efflux, les expériences ont prouvé [au contraire]

~~qu'il ne faut pas chercher des causes spéciales puisqu'il résulte~~ [ce qui est bien naturel puisque] ~~[illegible]~~ [que] ~~ce phénomène~~

les lois de la similitude dynamique s'y appliquent ~~et par conséquent qu'il est~~

[les équations des fluides visqueux sont suffisants de rendre compte de ce phénomène]

[les] ~~compris de par les équations des liquides visqueux~~, qui en montrent la cause

[en le réduisant aux] [des liquides s'accentuant]

dans ~~la prépondérance~~ ~~l'accentuation~~ ~~des~~ effets d'inertie (auprès des effets visqueux

ce qui est un argument important en faveur de notre explication qui réduit

~~[illegible]~~ [ce phénomène ~~aux~~ à l'accentuation]

[aux lois ordinaires des liquides visqueux, [illegible]] [Cette]

~~Les [illegible] donnent le moyen de~~ ~~Les lois de la~~ similitude dynamique

donnent le moyen de ~~juger~~ [prédire] la forme du mouvement d'après les liquides

pour des liquides à densité et viscosité quelconque ; ~~[illegible]~~ de même

[il est facile d'en déduire] [à savoir : les vitesses comp. seront en prop. inverse aux dimen..]

(l'influence des dimensions de l'orifice, ~~s'en déduit, puisqu'il est facile~~ [c'est-à-dire que]

~~([illegible] des vitesses [illegible]~~ [[illegible]] [correspondante] ~~[illegible] proportionnel)~~ ~~et par conséquent~~

*)

~~que~~ la veine se formera ~~d'autant~~ plus tôt avec une orifice grand que petit.

[Cependant] [l'élucidation] ~~[illegible]~~ [ne peut pas encore être considérée complète] [encore]

L'explication ~~complète~~ de ces phénomènes ~~exige~~ ~~[illegible]~~ la sou

~~Il y reste encore des détails~~ [à expliquer.] ~~n'est pas encore tout à fait complète.~~

Ce qui ~~est désirable~~ [reste à faire] c'est ~~une~~ [la] calculation théorique des liquides .. sur la base de

et c'est une tâche, à laquelle j'espère de revenir [là] au futur.

[C'est probable]

*) ~~Il paraît~~ [Je suppose] que l'épaisseur de la paroi et la forme de l'espace extérieur

sera indifférant jusqu'à une certaine limite.

limite

espace infini :

dr. Bull. Ac. Cr. 1904 s 371-84

Sur la formation des veines ~~[illegible]~~ d'efflux dans les liquides.

M. Smoluchowski.

Sur la formation des veines d'efflux dans les liquides.

O powstawaniu żył podczas wypływu cieczy

par

M. M. Smoluchowski

~~professeur à l'Université de Léopol.~~

Mémoire présenté par M. L. Natanson m. t.

I.

Un des phénomènes les plus ordinaires ~~de l'hydrodynamique~~ et pourtant trop peu étudiés, de l'hydrodynamique, c'est la formation d'une veine d'efflux lorsqu'un liquide passe par un petit orifice avec une vitesse suffisante. On peut s'expliquer ce fait, lorsque le liquide en traversant p. ex. une ouverture dans le fond d'un ~~vaisseau~~ vase sort dans l'air ambiant, par l'action ~~des forces~~ de la gravité et de la tension ~~superficielle~~ capillaire, qui ont la plus grande influence sur la forme du jet et qui peuvent causer même sa dispersion ~~en gouttes~~ ~~dans une série~~ dans un train de gouttelettes.

Mais ~~aussi~~ même lorsque l'espace extérieur est rempli du même liquide (rendu visible par la différence de coloration), où ces forces ne peuvent pas opérer, le liquide y forme une veine ~~[illegible]~~, au lieu de s'épandre dans toutes les directions. ~~et le même~~ Ce phénomène est

bien connu en aéromécanique (colonne de fumée, jet de vapeur).

À première vue l'interprétation de ces phénomènes d'après l'hydrodynamique des liquides idéals paraît impossible, puisqu'alors la distribution des lignes de flux devrait être analogue à celle des courants électriques, qui tendent, au contraire à remplir toute l'étendue du corps conducteur. Cependant, Helmholtz*) a établi une différence importante de ces deux cas, qui consiste dans une condition additionnelle de l'hydrodynamique, c'est-à-dire que la pression absolue ne peut s'abaisser nullepart audessous de la valeur zéro. ~~Le dépassement de cette limite engendrait une rupture~~ Au lieu de dépasser cette limite, le liquide se déchirerait, et la rupture engendrait une surface de discontinuité. Or, la théorie exige que la ~~élasticité~~ vitesse du liquide, qui est liée avec l'abaissement de la pression par la formule

$$p = p_0 - \rho \frac{v^2}{2} \qquad (1)$$

devienne infinie à chaque arrête pointue, d'où résulterait toutefois la naissance de telles surfaces de discontinuité, dans ces endroits.

Dans le cas mentionné il faut s'imaginer, d'après Helmholtz, que le liquide se fend au bord de l'orifice, et que la surface <u>de discontinuité, où la pression est zéro,</u> produit ce que nous appelons

*) Berl. Ber. 1868 p. 215, Gesam. Abhdg. I p. 146.

veine d'efflux, en séparant les parties centrales, animées d'un mouvement rapide, de l'eau dormante, à l'extérieur.

Cette théorie, en donnant lieu, dans le cas de deux dimensions, à l'emploi élégant des fonctions des variables complexes, a été le point de départ d'une quantité de recherches*) sur des formes spéciales des veines, qui forment un domaine considérable de l'hydrodynamique classique, très intéressant, sans doute, au point de vue mathématique.

Mais il ~~paraît~~ semble qu'on n'a jamais essayé de vérifier les hypothèses, sur lesquelles elle repose, d'une façon expérimentale.

Et il faut remarquer que cette théorie n'a pas été acceptée sans contradiction : ~~c'était~~ c'est surtout Lord Kelvin**) qui s'oppose à l'hypothèse des surfaces de discontinuité.

En effet, la supposition d'une telle surface, où deux parties du liquide à ~~vit~~ vitesses différentes et permanentes sont en contact, quoique justifiée dans le cas des liquides idéals, est inadmissible pour les liquides réels, doués d'une certaine viscosité, puisque la friction nivellerait cette différence des vitesses dans un moment***). On ne peut ~~la~~ que la regarder comme une fiction mathématique, dont l'usage peut être avantageux quelquefois, mais pourvu ~~qu'on~~ que l'on prouve que les conséquences ne sont pas de nature fictive aussi.

**) Nature 50 p. 524 - 597 (1894)

***) Voir p. ex. Lamb Hydrodynamics p. 541.

*) Kirchhoff Crelle J. 70 (1869), Abhdlg. p. 416; Michell Phil. Trans 1890; Rayleigh 5 (1876) p. 430; Réthy Berl. 1895 p. 679 etc.

(Nous ~~n'entrerons~~ n'examinerons pas maintenant) ~~dans la question de stabilité~~ si un tel mouvement, ~~s'il était~~ pourvu qu'il soit possible, (serait ~~était~~ stable), puisque nous y serons conduits par ~~les~~ l'expérience ~~mêmes, à la fin~~ à la fin de ce travail à élucider cette question; mais il faut au contraire insister sur ~~un détail encore~~ ~~encore~~, ce fait que l'hypothèse du liquide parfait ~~de la plus grande importance pour ces questions encore~~, ~~à savoir que~~ ~~la supposition~~ ~~des liquides idéals~~ s'écarte de la réalité surtout dans ce qui est le plus important (pour cette théorie), en admettant un glissement parfait, le long des parois du vaisseau et de l'orifice, tandisque les liquides réels y forment une couche adhérante immobile et par conséquent, ne causent pas le prétendu abaissement infini de la pression aux arêtes pointues.

D'autre part, comme je l'ai exposé dans un autre travail*), les équations ordinaires des fluides sont suffisantes — bien entendu si l'on tient compte de la viscosité — pour prouver la nécessité du phénomène caractéristique en question: de l'asymétrie des lignes de flux, par rapport à la surface de séparation.

Lorsque le mouvement est assez lent pour permettre l'omission des termes du second degrée par rapport aux vitesses, les équations du mouvement

$$\rho\left[\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z}\right] = -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu\left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right] \quad \text{etc.} \qquad (2)$$

ne sont pas changées par la substitution de $-u, -v, -w, a-p$, au lieu de u, v, w, p; c'est-à dire les lignes de flux ne changent pas de forme (seulement de direction) par suite d'une inversion des différences

*) Ces Bulletins 1903 p. 149.

de pression, et par conséquent, elles doivent être symétriques des deux côtés de l'orifice, pourvu que les parois soient symétriques.

Mais à mesure de l'accroissement des vitesses les termes d'inertie gagnent en importance, la substitution mentionnée cesse d'être applicable, et le mouvement devient asymétrique.

Il est facile de ~~prévoir à la conclusion~~ reconnaître, en considérant l'effet de ces deux facteurs, que le résultat sera justement une tendance au changement du mouvement dans le sens indiqué par le phénomène des veines.

Dans ce travail ~~C'était~~ le but de l'étude expérimentale exposé ~~ci-dessus~~: est de trancher la question de savoir si c'est l'effet de l'inertie et de la viscosité, ~~d'après notre~~ comme nous le supposions, ou bien si c'est la formation des surfaces de discontinuité, ~~d'après~~ conformément aux vues Helmholtz, qui produit le phénomène des veines d'efflux.

Les expériences étaient basées sur la méthode bien connue *) qui consiste à ~~de~~ faire entrer une matière colorante dans un certain point du liquide en mouvement, cequi permet d'observer la ligne de flux qui y passe, et de la copier.

Je choisis comme l'exemple le plus simple et le mieux défini: l'efflux par une ouverture dans une parois mince. Cette parois était représentée par une feuille de cuivre dur (épaisseur 0'095 mm) séparant les deux parties d'un tube en verre (diamètre 45 mm) dont les bases, aplanies et polies, y étaient attachées avec un peu de cire à cacheter. L'ouverture, au centre de la feuille, qui était traversée par le courant du liquide, avait une forme circulaire (diamètre 2'45 mm); ses bords étaient arrondis.

Fig. 1.

Les extrémités opposées des tubes étaient fermées par des bouchons, avec des tuyaux d'entrée et de décharge, dont l'un était construit d'une façon spéciale A, avec une pointe à l'intérieur percée d'un tout petit trou, cequi avait pour but de réduire les vitesses aux valeurs très petites exigées, comme nous verrons plus loin, dans ces expériences.

On produisait les vitesses désirées en élevant ~~A~~ le réservoir à l'hauteur convenable audessus du tuyau de décharge. Leurs valeurs

*) Oberbeck, Wied. Ann. 2 p. 1 (1877); Reynolds, Phil. Trans. 1883; Marey, Journ. Phys. 1 p. 192 (1902) et autres expérimentateurs.

résultaient du nombre des gouttes qui s'y écoulaient, et de leur poids moyen, obtenu par une détermination spéciale.

L'introduction de la matière colorante se faisait ~~par~~ au moyen du tube M, terminé par un allongement capillaire extrêmement mince ~~de moindre intérieur~~ et guidé par l'anneau R et par la boîte hermétique D, de telle façon que le point P d'où ~~sortit~~ sortait la matière colorante, pouvait être plus ou moins approché à la parois de séparation, en adoptant, en outre, une distance latérale quelconque, par suite d'un mouvement rotatoire du tube M. Le liquide colorant ~~sortit~~ sortait, en quantités très petites, pour éviter l'influence sur les lignes de flux, par suite de la pression exercée par un petit réservoir situé plus haut. C'était de l'encre bleue ordinaire (mais filtrée avec soin) dont je faisais usage pour ces expériences; sa densité était mesurée [à 1'00085 par rapport à l'eau de température égale (17°)] et celle de l'eau employée y était égalisée par l'addition d'une petite quantité (0'12 %) de sel.

La situation de l'appareil était telle que le point P et le milieu de l'ouverture se trouvaient au même niveau; par conséquent, la ligne de flux colorée, s'étendant de P dans le vaisseau B était contenue dans un ~~plaine~~ plan horizontal, et dans la même position se trouvait son image produit sur la table, ~~par~~ au moyen d'un miroir incliné, réfléchissant des rayons incidents perpendiculaires sur un prisme à réflexion totale.

On avait choisi cette disposition, puisqu'alors les courants ~~de~~ verticaux de convection produisent les moindres disturbations qui, en plus, peuvent être controlées toujours, en observant si la ligne de flux est bien horizontale. Ces courants engendrés par des variations de la température environnante causent bien d'ennui, lorsque la vitesse horizontale du ~~[illegible]~~ liquide est petite. Pour diminuer leurs effets il fallut envelopper l'appareil d'un large tube en verre, rempli chaque fois avec le même liquide que le vaisseau intérieur. Ces difficultés disparaissent d'ailleurs, pour la plupart, avec l'emploi des liquides plus visqueux, d'autant plus qu'il y faut employer caeteris paribus, comme nous verrons plus loin, des vitesses plus grandes *).

Outre ces précautions il fallait prendre ~~soin~~ garde à de la purification extrême des ~~[illegible]~~ liquides employés et de l'appareil lui-même, puisque la moindre particule de poussière suffisait à ~~gorger~~ engorger la capillaire P ~~[illegible]~~ ou l'ouverture A , et dans les expériences à pression diminuée, de ~~la jonction~~ au contact hermétique de toutes les parties de l'appareil.

---

*) ~~En tenant compte~~ Eu égard à ~~de cette circonstance on trouve cet effet proportionnel à~~ $\frac{\alpha \rho^2}{\mu^2}$ où α signifie le coefficient de dilatation thermique

~~Les résultats expérimentaux sont condensés dans le résumé suivant:~~ aux
Voici le résumé des résultats de nos expériences:

1). On observe la formation distincte des veines d'efflux, c'est-à-dire une diminution dans la divergence des lignes d'efflux, avec des vitesses très petites (0'5 $\frac{cm}{sec}$ vitesse moyenne dans l'ouverture pour l'eau). De plus, la vitesse*) paraissait maxim~~ale~~ dans l'axe de la veine et diminuait vers les parois, tandis que d'après Helmholtz l'inverse aurait dû se passer, avec une valeur critique de la vitesse, nécessaire ~~pour~~ à surmonter la pression atmosphérique ~~et~~ et ~~pour~~ à former la veine, de 14 $\frac{m}{sec}$.

*) [qui peut être jugée d'après la ténuité l'épaisseur du filament coloré, ou directement, en observant le mouvement d'un train d'agglomérations colorées produites par des secousses périodiques]

2). Les calculs de Helmholtz et de ses successeurs ne s'appliquent qu'au cas le plus simple: des parois infiniment minces et des arrêtes absolument pointues. En réalité on devrait s'attendre, en égard à la courbure finie des bords de l'orifice, à trouver une vitesse critique, séparant le cas où l'efflux est normal et analogue au flux d'électricité, et celui où la rupture du liquide et la formation de la veine a lieu.

Les expériences n'en ont indiqué rien, au contraire, le changement de la forme des lignes d'efflux avec vitesse croissante était tout à fait continu. C'est ce qui résulte de la figure 2, où la ligne de flux, sortant d'un point latéral P est tracée pour quelques valeurs de la vitesse: Fig 2

1). 0'90; 2) 0'80; 3) 0'71; 4) 0'55; 5). 0'43; 6) 0'24 $\frac{cm}{sec}$;

L'influence ~~graduelle~~ de la vitesse sur la partie située en aval de l'ouverture est évidente, tandisque les changements de la partie en amont étaient si petites que le dessin ne les accuse pas. En concordance avec nos remarques sur l'importance relative de l'inertie et de la viscosité, l'asymétrie ressort à mesure de l'accroissement de la vitesse, tandisque la courbe obtenue avec la moindre vitesse est presque symétrique.

Cette disparition de la symétrie et cette concentration graduelle des lignes d'efflux dans la veine ressort d'une façon plus nette encore dans les fig. 3, 4, 5, 6, correspondants aux vitesses 0'90, 0'45, 0'23, 0'14 $\frac{cm}{sec}$.

Elles sont le résultat d'une série de dessins, obtenus par superposition des différentes lignes produites par une vitesse donnée.

Un détail remarquable c'est la fonction des tourbillons annulaires, entourant la veine centrale — developpée très nettement surtout dans la fig. 3 — qu'on pouvait observer par inversion du courant, ainsi que le point P se trouvait du coté de la veine d'efflux.

Fig 3. — Fig. 4.

Elle donne le moyen de définir ce qu'on peut appeler surface de la veine, c'est à dire : la surface qui, en prenant origine aux bords de l'ouverture separe les lignes de flux provenant de l'espace en amont et les lignes closes tourbillonaires de l'espace en aval. Donc il est evident aussi, que le liquide environnant participe au mouvement de la veine, quoique ~~avec vitesse~~ dans un dégrée inférieur, et rien n'indique l'existence d'une discontinuité

de vitesse.

Ces tourbillons ~~varient~~ s'évanouissent rapidement avec diminution de vitesse; la fig. 5 ~~montre~~ indique encore la convergeance caractéristique des lignes de flux latérales en aval de l'ouverture, mais dans le cas représenté par la fig. 6 , où il n'y a plus qu'une trace d'~~asym~~ asymétrie, rien n'en pouvait être découvert; sans doute les courbes tendent vers une forme tout à fait symétrique pour la limite zéro de vitesse.

3/. Puisque, d'après Helmholtz, la naissance de la discontinuité dépend de la condition, que la pression aux bords de l'orifice s'abaisse à zéro, il en résulte que la vitesse critique devrait satisfaire à la relation

$v = \sqrt{\frac{2p_2}{\rho}}$ ..... (3), où p_2 désigne la pression dans l'espace extérieur B/1

et par conséquent, que les phénomènes en question se produisent à des vitesses d'autant plus petites que la pression extérieure p_2 est plus petite.

Pour examiner ~~la réalité~~ l'exactitude de cette conclusion, je faisais communiquer le réservoir primaire du liquide, le tuyau de décharge, et le petit réservoir de matière colorante avec un vaisseau, d'où l'air pouvait être extrait ~~par~~ au moyen d'une trompe aspirante. De cette manière la valeur absolue de pression pouvait être diminuée à volonté, sans changement des différences relatives.*)

Or, des expériences répétées dans des diverses circonstances, avec abaissement de la pression p_2 de 75 cm. à 7 cm. de mercure, n'ont indiqué aucun

*) Il est avantageux ~~afin~~ pour éviter la formation de bulles d'air, d'y employer de l'eau exempte d'air, par ébullition.

changement dans la forme des lignes de flux, ce qui nous force à réjeter définitivement ~~l'applicabilité~~ l'application de la théorie de Helmholtz aux phénomènes en question.

4). Dans cette théorie, ce n'est que la densité du liquide qui entre dans le ~~au~~ calcul, d'après (1), en ayant une influence sur la pression hydrodynamique; le dégré de viscosité est indifférant. D'après notre hypothèse, au contraire, c'est le rapport de la densité à la viscosité, la „fluidité", qui détermine la forme du mouvement. Si l'on connait une solution particulière des équations (2) pour un liquide caractérisé par les coéfficients μ_1, ρ_1, on leur satisfait aussi, pour un autre liquide, à coéfficients μ_2, ρ_2, en ~~mettant~~ posant $u_2 = u_1 \frac{\mu_2 \rho_1}{\mu_1 \rho_2}$ etc., $\Delta p_2 = \Delta p_1 \frac{\mu_2^2 \rho_1}{\mu_1^2 \rho_2}$ .....(4)
ce qui n'est qu'un cas particulier de la similitude dynamique.*)

Par conséquant, si notre explication du phénomène des veines est exacte, la forme des lignes dépendra de la viscosité, mais elle sera la même dans les différants liquides, pour des vitesses choisies en raison inverse de leur fluidité, qui exigeront l'emploi des pressions proportionnelles ~~à l'inverse du produit~~ au rapport $\frac{\mu_2^2 \rho_1}{\mu_1^2 \rho_2}$.

En effet, cette règle a été vérifiée par l'emploi de deux solutions de glycérine, et des colorants mêlés avec cette substance jusqu'à l'égalisation des densités.

Voici ~~les~~ les valeurs rélatives de leurs coéfficients de viscosité (pour la température 19.5°), mesurées par ~~et des coefficients de similitude $\frac{\mu_2 \rho_1}{\mu_1 \rho_2}$~~

*) Voir: Helmholtz, Wiss. Abh. I p. 891, 158; Smoluchowski, ces Bulletins 1903 p. 151; Prace mat. fiz. XV p. 115 (1904); Phil. Mag. 7 p. 667 (1904).

la méthode ordinaire de Poiseuille et des coefficients de similitude

~~Glycérine~~ $\alpha = \frac{\mu_2 \rho_1}{\mu_1 \rho_2}$, par rapport à l'eau employée, qui en résultent :

Glycérine I ; densité 1·094 ; viscosité relative 3·38 ; α = 2·895

Glycérine II ; densité 1·116 ; viscosité relative 5·02 ; α = 4·20

Les densités des deux solutions correspondent aux ~~mélange de~~ degrés de concentration : 37·5% et 45·8%.

Ces expériences s'accordaient si bien qu'on pouvait superposer les systèmes des courbes obtenues avec vitesses correspondantes [d'après (4)]. Ainsi la fig. 3 était obtenue dans l'eau avec la vitesse 0·90 $\frac{cm}{sec}$ dans Glycérine I avec la vitesse 2·58 $\frac{cm}{sec}$, d'où résulte le rapport des vitesses 2·87 en accord parfait avec le ~~nombre~~ coefficient de similitude 2·895. D'autre part, la vitesse 0·90 $\frac{cm}{sec}$ ou plutôt, eu égard à la différence de densité : 0·86 $\frac{cm}{sec}$ qui d'après la théorie de Helmholtz (dans la Glycérine I correspondrait à la ~~figure~~ vitesse 0·90 dans l'eau), produit une image tout-à-fait différente, intermédiaire entre les fig. 4 et fig. 5.

De même, par exemple, l'identité de la fig. 4 obtenue (dans les trois liquides) avec des vitesses correspondantes (selon la relation (4)) a été constatée.

En traçant la fig. 6, j'ai tiré profit de cette ~~similarité~~ similitude dynamique, en faisant usage de la figure résultant de la vitesse correspondante dans la glycérine II, puisque l'effet des courants de convection ~~pour~~ se faisait sentir dans l'eau ordinaire à un tel degré, pour ce mouvement lent,

qu'on ne pouvait tracer que les parties antérieures et moyennes des lignes.

J'ajouterai, ~~en~~ entre parenthèse, que ceci semble être la première vérification expérimentale de l'identité géométrique des mouvements semblables. Aussi les déterminations approximatives des pressions s'accordaient avec la règle (4), mais je n'entrerai pas dans ces détails, qui n'ont pas de portée directe sur le sujet principal.

IV

Pendant que les faits exposés plus haut prouvent d'une façon évidente que la formation des veines liquides est causée par l'inertie et la viscosité, d'autre part, l'idée fondamentale de Helmholtz : l'abaissement de pression à l'orifice et la possibilité d'une rupture du liquide, semble être bien raisonnable — c'est de cette façon même que nous expliquons le fonctionnement des trompes aspirantes — et ~~il paraissait désirable de~~ c'est pourquoi j'ai poussé ~~r~~ l'étude expérimentale plus loin, vers les vitesses grandes, où de telles phénomènes se pourraient produire.

Comme le dispositif délicat, décrit plus haut, ne s'y prêtait pas, je construisis un appareil très simple et solide ~~robuste~~ (Fig. 7), c'est-à-dire : un tube en verre (diamètre 8·4 mm) rétréssi ~~dans~~ dans la moitié de sa longueur au milieu de telle façon qu'il n'y restait qu'un ~~ouverture~~ canal étroit ~~e~~ [dont les dimensions,

déterminées à la fin sur la coupe transversale du tube, aplanie par le polissage étaient 0·93 et 1·00 mm.] qui était muni dans sa partie supérieure d'un petit tube latéral servant à l'introduction du colorant, ou à la communication avec un manomètre.

Fig. 7

D'abord, pour examiner les petites vitesses, ce tube fus mis en communication avec un diaphragme et avec un réservoir d'eau, à niveau plus élevé, causant une petite différence de pression. Les lignes de flux colorées mettaient en évidence les traits caractéristiques ~~de la~~ des veines, à des vitesses ~~si petites que~~ de la petitesse de 6·1 $\frac{cm}{sec}$ dans le canal (c'est 0·082 $\frac{cm}{sec}$ dans le tube). Pendant que l'asymétrie était disparue à la vitesse de 2·4 $\frac{cm}{sec}$, au contraire, avec 8·3 $\frac{cm}{sec}$, il s'y formait une veine cylindrique, longue de 3 cm, entourée de tourbillons, et sujette à des petits changements oscillatoires.

Evidemment, en égard à la lenteur du mouvement, et à la petitesse de la courbure des parois, il n'y ~~peut~~ pouvait pas être question des phénomènes de Helmholtz, et pourtant la veine caractéristique se formait.

En suite, ce tube fut attaché immédiatement au conduit d'eau (pression 3·5 atm.), pendant que l'extrémité inférieure communiquait avec un vaisseau — servant à mesurer la vitesse d'efflux — où la pression pouvait être réduite ~~par~~ au moyen d'une trompe aspirante.

~~Avant tout~~ D'abord, le tube fut rempli d'eau dans toute sa longueur.

Et alors, lorsque le robinet fut ouvert, il y apparaissait, en réalité, pour une certaine vitesse, le phénomène ~~expecté~~ attendu: la veine d'eau se déchirait, ou bien se détachait du liquide environnant, (en quittant le canal) ce qui était visible par suite de la formation d'une surface réfléchissante à l'intérieur. Mais le phénomène n'était pas du tout permanent, son caractère intermittent s'accusait par un bruit bourdonnant; aussi apercevait-on souvent des interruptions et, en général, une considérable irrégularité du phénomène.

En réglant l'afflux d'eau d'une façon convenable, on pouvait évaluer ~~la valeur critique~~ approximativement la vitesse critique, où ce phénomène apparaissait, à 24 $\frac{m}{sec}$ dans le canal, tandisque la rélation (3) exigerait une vitesse de 144 $\frac{m}{sec}$ pour l'abaissement de la pression de 78cm. à zéro.

Et lorsque la pression extérieure p_2 fut réduite à 35·5cm, par moyen de la trompe, ~~on~~ le phénomène se produisait dès que la vitesse 14 $\frac{m}{sec}$ était atteinte, pour la pression de 25·5 cm à une vitesse de 12 $\frac{m}{sec}$, ce qui correspond aux valeurs théorétiques 9·7 $\frac{cm}{sec}$ et 8·2 $\frac{cm}{sec}$.

En même temps l'aspect du phénomène changeait: avec la pression atmosphérique l'eau — toute claire jusqu'au moment où la vitesse critique est atteinte — devient trouble au delà, ce qui provient du dégagement d'une quantité de toutes petites bulles d'air, mais avec l'emploi des pressions basses il s'y forment des bulles grandes, comme dans de l'eau bouillante.

On pourrait ~~espérer que~~ s'attendre à trouver la vitesse d'efflux ~~sous~~ indépendante de la pression ~~intérieure~~ en amont p_1, pourvu que la vitesse critique soit atteinte, puisqu'alors la pression ~~auprès~~ à la sortie de l'orifice aurait toujours la même valeur zéro. Mais cette conclusion n'a pas été vérifiée par l'expérience, au contraire, on constatait toujours un accroissement de vitesse ± par suite ~~d'~~ de l'augmentation de la pression p_1.

Les causes de cette divergeance et des différences entre les valeurs calculées et observées des vitesses critiques sont sans doute les mêmes: d'une part le caractère instable, oscillatoire du phénomène et d'autre part la viscosité du liquide, qui défie tous les calculs basés sur l'abstraction des liquides idéals.

V.

Nous résumerons les conclusions définitives de ces expériences:

Le phénomène de Helmholtz, c'est à dire la ~~double~~ rupture de la masse liquide quittant une petite ouverture, peut avoir lieu, en réalité ~~[illegible]~~, si la vitesse dépasse une valeur considérable (une vingtaine de mètres)*) mais c'est un phénomène secondaire, qui n'a rien à faire avec la formation des veines d'efflux mêmes, qui peut commencer à des vitesses plus que ~~[illegible]~~ cent fois plus petites.

D'ailleurs ~~Mais~~ les expériences ne ~~prouvent rien~~ seraient pas du tout à confirmer, bien entendu, ~~pour~~ l'hypothèse des surfaces de discontinuité de vitesse, qui nous paraît inadmissible ~~au point de vue théorique~~ pour des raisons expliquées au commencement. En général, la théorie de Helmholtz est très intéressante, sans doute, au point de vue théorique, puisqu'elle démontre la possibilité de tels phénomènes dans les liquides idéals, mais son application aux liquides réels n'est

*) Sans doute des vitesses beaucoup plus grandes encore seront nécessaires dans de l'eau purgée d'air.

nullement justifiée, même pour des vitesses aussi grandes que celles que l'on a considérées, ce que démontre le fait de l'intermittence*) des phénomène et le désaccord du calcul des vitesses et de l'observation directe.

Il semble que c'est un cas analogue à celui du mouvement des corps plongés dans un liquide, où les calculs basés sur l'hypothèse des liquides parfaits, et ne tenant pas compte ni de la dissipation de l'énergie ni de l'adhésion aux parois, aboutissent à des conclusions tout-à-fait incorrectes.

En outre, il faut remarquer que les solutions spéciales, trouvées jusqu'ici d'après cette méthode, exigent toutes des valeurs définies de la vitesse d'afflux pour une pression p_2 donnée, et ne répondent pas à la question de savoir ce qui arrive, si cette vitesse change par suite d'un changement de la pression p_1 (en amont de l'orifice).

Quant à la formation des veines d'afflux, les expériences ont prouvé que les lois de la similitude dynamique s'y appliquent parfaitement, ce qui est un argument important en faveur de notre explication, qui réduit ce phénomène aux lois ordinaires des liquides visqueux, notamment aux effets d'inertie s'accentuant (à mesure de la rapidité du mouvement) par rapport aux effets de la viscosité du liquide.

Cette similitude dynamique donne le moyen de prédire la forme des lignes de flux d'après les fig. 3, 4, 5, 6, pour des liquides à densité et viscosité quelconque ; de même il est facile d'en déduire l'influence des dimensions de l'orifice, à savoir : les vitesses correspondantes seront

*) En connexion, sans doute, avec les „mouvements turbulents" et la formation du son dans les tuyaux.

en proportion inverse aux dimensions et par conséquent, la veine se formera plutôt avec un orifice grand que petit. *)

Cependant, l'explication donnée ne peut pas encore être considerée comme complète. Ce qui reste à faire, c'est ~~la calculation~~ le calcul théoretique des lignes ~~d'afflux~~ de flux ~~sur la base de~~ au moyen de cette théorie, et c'est là une ~~tâche~~ problème, ~~à laquelle~~ sur lequel j'espère ~~de~~ revenir ~~au futur~~ dans l'avenir.

~~Léopol,~~ [Laboratoire de physique à l'université de Léopol.]

---

*) ~~Il~~ C'est probable que l'épaisseur de la parois et la forme ~~de l'espace intérieur~~ du vaisseau seront indifférantes, jusqu'à une certaine limite.

Druga korekta do p. prof. Smoluchowskiego
adres: Poronin, Willa Charvańca. Po poprawieniu drugiej korekty proszę przesłać do p. prof. Zaremby w Zakopanem

33. M. M. SMOLUCHOWSKI. O powstawaniu żył podczas wypływu cieczy. *(Sur la formation des veines d'efflux dans les liquides).* Mémoire présenté par M. L. Natanson m. t.

I.

Un des phénomènes les plus ordinaires pourtant et trop peu étudiés, de l'hydrodynamique, est la formation d'une veine d'efflux lorsqu'un liquide passe par un petis orifice avec une vitesse suffisante. On peut s'expliquer ce fait, lorsque le liquide en traversant p. ex. une ouverture dans le fond d'un vase soit dans l'air ambiante, par l'action de la gravité et de la tension capillaire, qui ont la plus grande influence sur la forme du jet et qui peuvent causer même sa dispersion dans un train de gouttelttes.

Mais même lorsque l'espace extérieur est rempli du même liquide (rendu visible par la différence de coloration) où ces forces ne peuvent pas opérer, le liquide y forme une veine, an lien de s'épandre dans toutes les directions. Ce phénomène est bien connu en aéromécanique (colonne de fumée, jet de vapeur).

À première vue l'interprétation de ces phénomènes d'après l'hydrodynamique des liquides idéals parait impossible, puisqu'alors la distribution des lignes de plux dvrait être analogue à celle des courants électriques, qui tendent an contraire à remplir toute l'étendue du corps conducteur. Cependant, Helmholtz [1]) a établi une différence importante de ces deux cas, qui consiste dans une condition additionnelle de l'hydrodynamique, c'est-à-dire que la pression absolue ne peut s'abaisser nullepart andersons de la valeur zéro. Au lieu de dépasser cette limite, le liquide se déchirerait, et la rupture engendrait une surface de discontinuité. Or, la théorie exige que la vitesse du liquide, qui est liée avec l'abaissemend de la pression par la formule

$$p = p_0 - \varrho \frac{v^2}{2} \qquad (1)$$

devienne infinie à chaque arrête pointe, d'où rósulterait toutsfois la naissance de telles surfaces de discontinuité, dans ces endroits.

Dans la cas mentionné il faus s'imginer, d'après Helmholtz, que le liquide se fend au bord de l'orifice, et que la surface de

[1]) Berl. Ber. 1868 p. 215, Gesat. Abhdg. I p. 146.

discontinuite, où la pression est zéro, produit ce que nous appelons veine d'efflux, en séparant les parties centrales, animées d'un mouvement rapide, de l'eau dormante, à l'extérieur.

Cette théorie, en donnant lien, dans le cas de deux dimensions, à l'emploi élégant des fonctions de variables complexes, a été le point de départ d'une quantité de recherches [1]) sur des formes spéciales des veines, qui forment un domaine considérable de l'hydrodynamique classique, très intéréssant, sans doute, au point de vue mathématique.

Mais il semble qu'on n'a jamais essayé de vérifier les hypothèses, sur les quelles elle repose d'une façon expérimentale.

Et il faut remarquer que cette théorie n'a pas été acceptée sans contradiction: c'est surtout Lord Kelvin [2]) qui s'oppose à l'hypothèse des surfaces de discontinuité.

En effet, la supposition d'un telle surface, où deux parties du liquide à vitesses différentes et permanentes sont en contact, quoique justifiée dans le cas des liquides idéals, est inadmissible pour les liquides réels donés d'une certaine viscosité, puisque la friction nivellerait cette différence des vitesses dans un moment [3]). On ne peut que la regarder comme une fiction mathématique, dont l'usage peut être avantageux quelquefois, mais pourvu que l'on prouve que les conséquences ne sont pas de nature fictive aussi.

Nous examinerons pas maintenant si un tel mouvement, pourvu qu'il soit possible, serait stable puisque nous serons conduits à élucider cette question par l'expérience à la fin de ce travail; mais il faut insister au contraire sur ce fait que l'hypothèse du liquide parfait s'écarte de la réalité surtout dans ce qui est le plus important pour cette théorie, en admettant un glissement parfait, le long des parois du vaisseau et de l'orifice, tandisque les liquides réels y forment une couche adhérante immobile et par conséquant, ne causent pas prétendu abaissement infini de la pression aux arrêtes pointues.

D'autrepart, comme je l'ai exposé dans un autre travail [4]), les équations ordinaires des fluides sont suffisantes — bien entendu si

[1]) Kichhoff Crelle J. 70 (1869), Abhdlg. p. 416; Rayhigh 5 (1875) p. 430; Michell Phil. Trans 1890; Réthy Beibl. 1895 p. 619 etc.

[2]) Nature 50 p. 524—597 (1894).

[3]) Voir p. ex. Lamb Hydrodynamics p. 541.

[4]) Ces Bulletins 1903 p. 149.

l'on tant compte de la viscosité — pour prouver la nécessité du phénomène caractéristique in question: de l'esymetris des lignes de flux, par rapport à la surface de séparation.

Lorsque le mouvement est esser lent pour permettre l'omission des termes du second degrée par rapport aux vitesses, les équations du mouvement

$$\varrho\left[\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}+w\frac{\partial u}{\partial z}\right]=$$

$$-\frac{\partial p}{\partial x}+\mu\left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right] \text{ etc.} \qquad (2)$$

ne sont pas changées par la substitution de $-u$, $-v$, $-w$, $a-p$, au lieu de u, v, w, p; c'est-à-dire les lignes de flux ne changent pas de forme (seulement de direction) pas suite d'une inversion des différences de pression, et par conséquant, elles doivent être symétriques des deux cotés de l'orifice, pourvu que les parois soient symétriques.

Mais à mesure de la croissement des vitesses les termes d'inertie gagnent en importance, la substitution mentionée cesse d'être applicable, et le mouvement devient asymétrique.

Il est facile de reconnaître, en considérant l'effet de ces deux facteurs, que le résultet sera justement une tendance an changement du mouvement dans le sens indiqué par le phénomène des veines.

Le but de l'étude expérimentale exposée dans ce travail est de trancer la question de savir si c'est l'effet de l'inertie et de la viscosité, comme nous le supposions, on bien si c'est la formation des surfaces de discontinuité, conférmément aux veines Helmholtz, qui produit le phénomène des veines d'efflux.

II.

Les expériences étaient basées sur la méthode bien connue [1]) qui consiste à faire entrer une matière colorante dans un certain point du liquide en mouvement, cequi permet d'observer la ligne de flux qui y passe, et de la copier.

Je choisis comme l'exemple le plus simple et le mieux défini: l'efflux par une ouverture dans une parois mince. Cette parois était

[1]) Oberbeck, Wied. Ann. 2 p. 1 (1877); Reynolds, Phil. Trans. 1883; Marey Journ. Phys. 1 p. 192 (1902) et autres expérimentateurs.

représentée par une feille de cuivre dur (épaisseur 0·095 mm) séparant les deux parties d'un tube en verre (diamètre 45 mm) dont les bases, planies et polies, y étaient attchées avec un peu de cire à cacheter. L'ouverture, au centre de la feille, qui était traversée par le corant du liquide, avait une forme circulaire (diamtre 2·45 mm); ses bords étaient arronfis.

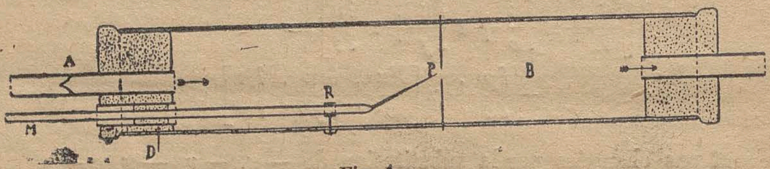


Fig. 1.

Les extrémités opposées des tubes étaient fermées par des bouchons, avec des tuyaux d'entrée et de décharge, dont l'un était construit d'une façon spéciale A, avec une pointe à l'intérieur percée d'un tout petit trou, cequi avit pour but de rédire les vitesses aux valeurs très petites exigées, comme nous verrons plus loin, dans ces expériences.

On produisait les vitesses désirées en élévant le réservoir à l'hauteur convenable adessus du tuya de décharge. Leurs valeurs résultaint du nombre des gouttes qui s'y exoulaient, et de leur poids moyen, obtenu par une détermination spciale.

L'introduction de la matière colorante se faisat au moyen du tube M, terminé par un allongement capillaire extrêmement mince et guidé par l'anneau R et par la boite hermétique D, de telle façon que le point P d'où sortait la matière colorante, pouvait être approché de plus ou moins à la parois de sparation, en adoptant, en outre, une distance latérale quelconque, par suite d'un mouvement rotatoire du tube M. Le liquie colorant sortait, en quantités très petites, pour éviter l'influence sur les lignes de flux, par suite de la pression exercée par un petit reservoir situé plus haut. C'était de l'encre blee ordinaire mais filtrée avec soin dont je faisais usage pour ces expérices; sa densité était mesurée à 1·00085 par rapport à l'eau de température égale (170)] et celle de l'eau employée y était égalisée par l'addition d'une petite quantité (0·12%) de sel.

La situation de l'appareil était telle que le point P et le milien de l'ouverture se trouvaint an même niveau; par conséquant la ligne de flux colorée, s'étendant de P dans le vaissean B était

contenue dans un plan horizontal, et dans la même position se trouvait son image produit sur la table, au moyen d'un miroir incliné, reflechissant des rayons incidentz perpendiculaires sur un prisme à rflexion totale.

On avait choisi cette disposition, puisqu'alors les courants verticaux de convection produisent les moindres disturbations qui, en plus, peuvent être controlées toujours, en observant si la ligne de flux est bien horizontale. Ces courants engendrés par des variotions de la tompérature environnante causent bien d'ennui, lorsque la vitesso horizontale du liquide ost petite. Pour diminuer leurs effets il follut envelopper l'appareil d'un large tube en verre, rempli chaque fois avec le même liquide que le vaissean intérieur. Ces difficultés disparaissent d'ailleurs, pour la plupart, avec l'emploi des liquides plus visqueux, d'antant plus qu'il y faut employor caeteris paribus, comme nous verrons plus loin, des vitesses plus grandes.

Outre ces précantions il fallait prendre garde à de la purification extrêmo des liquides employés et de l'appareil lui-même, puisque la moiudre particule de poussière suffisait à engorger la capillaire P on l'ouverture A, et dans les expériences à pression diminuéo, au contact hermétique de toutes les parties de l'appareil

III.

Voici le résumé des résultats de nos experiences:

1) On observe la formation distincte des veines d'efflux, c'est-à-dire une diminution dans la divergence des lignes d'efflux, avec des vitesses très petites ($0{\cdot}5 \frac{cm}{sec}$ vitesse moyenne dans l'ouverture pour l'eau). De plus, la vitsse[1]) paraissait maxima dans l'axe de la veine et diminnait vers les parois, tandisque d'après Helmholtz l'inverse aurait dû se passer, avec une valeun critique de la vitesse, nécessaire à surmonter la pression atmosphérique et à former la veine, de 14 $\frac{m}{sec}$.

2) Les calculs de Helmholtz et de ses succésseurs ne s'appliquent qu'an cos le plus simple: des parois infiniment minces et des arrêtes

[1]) Qui peut être jugée d'après la ténuité du filament coloré, ou directement, en observant le mouvement d'un train d'agglomérations colorées produites par des secousses périodiques.

bsolument pointues. En réalité on devrait s'attendre, eu égard à la courbure finie des bords de l'orfice, à trouver une vitesse critique, séparant le cas où l'efflux est normal et analogue au flux d'électricité, et celui où la rupture du liquide et la formation de la veine a lien.

Les expériences n'en ont indiqué rien, au contraire, le changement de la forme des lignes d'efflux avec vitesse croissante était tout à fait continu. C'est ce qui résulte de la figure 2, où la ligne de flux, sortant d'un point lateral P est tracée pour quelques valeurs de la vitesse:

$$1)\ 0{\cdot}90;\quad 2)\ 0{\cdot}80;\quad 3)\ 0{\cdot}71;\quad 4)\ 0{\cdot}55;\quad 5)\ 0{\cdot}43;\quad 6)\ 0{\cdot}24\ \frac{\text{cm}}{\text{sec}};$$

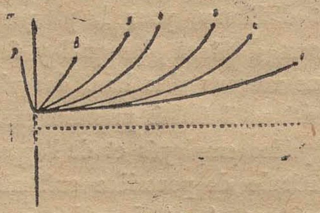


Fig. 2.

L'influence de la vitesse sur la partie située en avel de l'ouverture est évidente, tandisque les changements de la partie en amont étaient si petites que le dessin ne les accuse pas. En concordance avec nos remarques sur l'importance relative de l'inertie et de la viscosité, l'asymétrie ressort à mesure de l'acroissement de la vitesse, tandisque la courbe obtenue avec la moindre vitesse est est presque symétrique.

Cette disparition de la symétrie et cete concentration graduelle des lignes d'efflux dans la veine ressort d'une façon plus nette eucore dans les fig. 3. 4, 5, 6, correspondants aux vitesses 0·90, 0·45, 0·23, 0·14 $\frac{\text{cm}}{\text{sec}}$.

Elles sont le résultat d'une série de dessins, obtenus par superposition des différentes lignes produites par une vitesse donuée.

Un détail remarquable c'est la formation des tourbillons annulaires, entourant la veine centrale — développée très nettement surtont dans la fig. 3 — qu'on pouvait observer par inversion du courant, ainsi que le point P se trouvait du coté de la veine d'efflux.

Elle donne le moyen de définir ce qu'on peut appeler surface

de la veine, c'est à dire: la surface qui, en prenant origine aux bords de l'ouverture sépare les lignes de flux provenant de l'espace en amont et les lignes éloses tourbillonaires de l'espace en aval. Donc, il est evident aussi, que le liquide environnant participe au

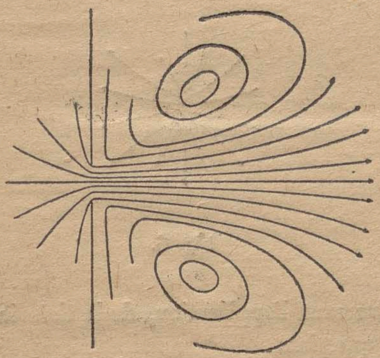


Fig. 3.

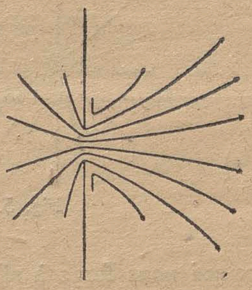


Fig. 4.

mouvement de la veine, quoique dans un dégrée inférieur, et rien n'indique l'existence d'une discontenuité de vitesse.

Ces tourbillons s'évanonissent rapidement avec diminution de vitesse; la fig. 5 indique encore la convergeance caractéristiques des lignes de flux latérales en aval de l'ouverture, mais dans le cas représenté par la fig. 6, où il n'y a plus qu'une trace asymétrie, rien n'en pouvait être découvert; sans doute les courbes tendent vers une forme tout à fait symétrique pour la limite zéro de vitesse.

3) Puisque, d'après Helmholtz, la naissance de la discontenuité dépend de la condition, que la pression aux bords de l'orifice s'abaisse à zéro, il en résulte que la vitesse critique derait satisfaire à la relation

$$v = \sqrt{\frac{2p_2}{\varrho}}, \tag{3}$$

où p_2 désigne la pression dans l'espase extérieur B, et par conséquant, que les phénomènes en question se produisent à des vitesses d'antant plus petites que la pression extérieure p_2 est plus petite.

Pour examiner l'exactitude de cette conclusion, je communiquer le réservoir primaire du liquide, tuyan de décharge, et le petit réservoir de matière colorante avec un vaissean, d'où l'air pouvait être extrait au moyen d'une trompe espirante. De cette manière la

valeur absolue de pression pouvait être diminuée à volonté, sans changement des différences relatives[1]).

Or, des expériences répétées dans des circonstances diverses, avec abaissement de la pression p_2 de 75 cm à 7 cm de mercure, n'ont indiqué aucun changement dans la forme des lignes de flux,

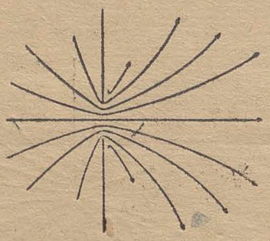


Fig. 5.

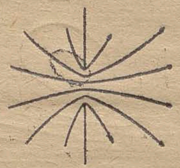


Fig. 6.

ce qui nous force à réjeter définitivement l'application de la théorie de Helmholtz aux phénomènes en question.

4) Dans cette théorie, ce n'est la densité du liquide qui entre dans le calcul d'après (1), en ayant une influence sur la pression hydrodynamique; le dégré de viscosité est indifférant. D'après notre hypothèse, au contraire, c'est le rapport de la densité à la viscosité, la „fluidité", qui détermine la forme du mouvement. Si l'on connait une solution particulière des équations (2) pour un liquide caractérisé par les coéfficients μ_1, ϱ_1, on leur satisfait aussi, pour un antre liquide, à coéfficients μ_2, ϱ_2, en posant

$$(4) \qquad p_2 = p_1 \frac{\mu_2 \varrho_1}{\mu_1 \varrho_2} \text{ etc.,} \qquad \Delta p_2 = \Delta p_1 \frac{\mu_2^2 \varrho_1}{\mu_1^2 \varrho_2}$$

ce qui n'est q'un cas particulier de la similitude dynamique[2]).

Par conséquant, si notre explication du phénomène des veines est exacte, la forme des lignes dépendra de la viscosité, mais elle sera la même dans les différants liquides, pour des vitesses choisies en raison inverse de leur fluidité, qui exigeront l'emploi des pressions proportionnelles au rapport $\frac{\mu_2^2 \varrho_1}{\mu_1^2 \varrho_2}$.

[1]) Il est avantageux pour éviter la formation de bulles d'air, d'y employer de l'eau exempte d'air, par ébullition.

[2]) Voir: Helmholtz, Wiss. Abh. I p. 158, 891; Smoluchowski, ces Bulletins 1903 p. 151; Prace mat. fiz. XV p. 115 (1904); Phil. Mag. 7 p. 669 (1904).

En effet, cette règle a été vérifiée par l'emploi de deux solutions de glycerine, et des colorants mêlés avec cette substance jusqu'à l'égalisation des denfités.

Voici les valeurs rélatifes de leurs coéfficients de viscosité (pour la température 19·5°), mesurées par la méthode de Poiseuille et des coéfficients de similitude $\alpha = \frac{\mu_2 \varrho_1}{\mu_1 \varrho_2}$, par rapport à l'eau employée, qui en résultent:

Glycerine I ; densité 1·094; viscosité relative 3·38; $\alpha = 2{\cdot}895$

Glycerine II; densité 1·116; viscosité relative 5·02; $\alpha = 4{\cdot}20$

Les densités des deux solutions correspondent aux dégrés de concentration: 37·5% et 45·8%.

Les expériences s'eccordaient si bien qu'on pouvait superposer les systèmes des courbes obtenus avec vitesses correspondantes [d'après (4)]. Ainsi la fig. 3 était obtenue dans l'eau avec la vitesse 0·90 $\frac{cm}{sec}$ qui d'après la théorie de Helmholtz corresponderait dans la Glycerine I à la vitesse 0·90 dans l'eau, produit une image tout-à-fait differente, intermédiare entre les fig. 4 et fig. 5.

De même, par exemple, l'identité de la fig. 4 obtenue dans les trois liquides avec des vitesses correspondantes (selon la rélation (4)) a été constatée.

En traçant la fig. 6, j'ai tiré profit de cette similitude dynamique, en faisant usage de la figure résultant de la vitesse correspondante dans la glycerine II, puisque l'effet des courants de convection se faisait sentir dans l'eau ordinaire à un tel dégrée, pour ce mouvement lent, qu'on ne pouvait tracer que les parties antérieures et moyennes des lignes.

J'ejonterai, entre parenthèse que ceci semble être la première vérification expérimentale de l'identité géométrique des mouvements semblebles. Aussi les déterminations approximatives des pressions s'accordaient avec la règle (4), mais je n'entrerai pas dans ces détails, qui n'ont pas de portée directe sur le sujet principal.

IV.

Pendant que les faits exposés plus haut prouvent d'une façon évidente que la formation des veines liquides est causée par l'inertie et la vescosité, d'antrepart, l'idée fondamentale de Helmholtz: l'abaissement de pression à l'orfice et la possibilité d'une rupture

, dans Glycerine I avec la vitesse 2·58 $\frac{cm}{sec}$, d'où résulte le rapport des vitesses 2·87, en accord parfait avec le coéfficient de similitude 2·895. D'autrepart, la vitesse 0·90 $\frac{cm}{sec}$ ou plutôt, eu égard à la différence de densité : 0·86 $\frac{cm}{sec}$,

du liquide, semble être bien reisonnable — c'est de cette façon même que nous expliquons le fonctionnement des trompes aspirantes — et c'est pourquoi j'ai poussé l'étude expérimentale plus loin, vers les vitesses grandes, où de telles phénomênes se pourraient produire.

Comme les dispositif délicat, décrit plus haut, ne s'y prêtait pas, je construisis un appareil très simple et solide (Fig. 7), c'est-à-dire: un tube en verre (diamêtre 8·4 mm) rétrassi dans la moitié de sa longheur ~~au milieu~~ de telle façon qu'il n'y restail qu'un canal étroit [dont les dimensions, déterminées à la fin sur la coupe transversale du tube, aplanie par le polissége étaient 0·93 et 1·00 mm] qui était muni dans sa partie supérieure d'un petit tube latéral servant à l'introduction du colorant, on à la communication avec un manomètre.

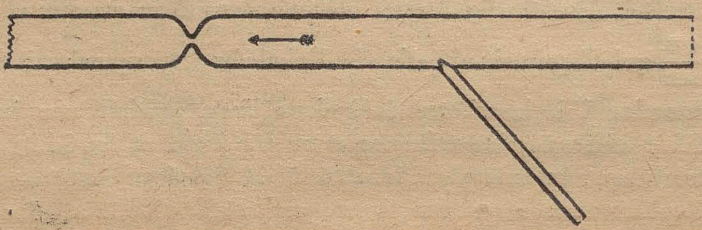


Fig. 7.

D'abord, pour examiner les petites vitesses, ce tube fus mis en communication avec un diaphragme et avec un réservoir d'eau, à niveau plus élové, causant une petite différence de pression. Les lignes de plux colorées hettaient en évidence les traits caractéristiques des veines, à des vitesses de la petitesse de 6·1 $\frac{cm}{sec}$ dans le canal (c'est 0·082 $\frac{cm}{sec}$ dans le tube). Pendant que l'asymétrie était disparne à la vitesse de 2·4 $\frac{cm}{sec}$, avec 8·3 $\frac{cm}{sec}$ il s'y formait une cylindrique, longue de 3 cm, entourée de tourbillons, et sujette à de petits changements oscillatoires.

Evidemment, eu égard à la lenteur du mouvement et à la petitesse de la courbure des parois, il n'y pouvait pas être question des phénomènes de Helmholtz, et pourtant la veine caractéristique se formait.

En suite, ce tube fut attaché immédiatement au conduit d'eau (pression 3·5 ctm.), pendant que l'extrémité inférieure communiquait avec un vaisseau — servant à mesurer la vitesse d'efflux — où la pression pouvait être réduite au moyen d'une trompe aspirante.

Tout d'abord, le tube fut rempli d'eau dans toute sa longueur.

Et alors, lorsque le robinet fut ouvert, il y apparaissait, en réelité, pour une certaine vitesse, le phénomène attendu; la veine d'eau en quittant le canal, se déchirait, ou bien se détechait du liquide environnant, ce qui était visible par suite de la formation d'une surface réflechissante à l'intérieur. Mais la phénomène n'était pas du tout permanent, son caractère intermittent s'accusait par un bruit bourdonnant; aussi apercevait-on souvent des interruptions et, en général, une considérable irrégularité du phénomène.

En reglant l'efflux d'eau d'une façon convenable, on pouvait évoleur approximativement la vitesse critique, où ce phénomène apparaissait, à 24 $\frac{m}{sec}$ dans le canal, tandisque la relation (3) exigerait une vitesse de 14·4 $\frac{m}{sec}$ pour l'abaissement de la pression de 78 cm. à zéro.

Et lorsque la pression extérieure p_2 fut réduite à 35·5 cm, par moyen de la trompe, le phénomène se produisait dès que la vitesse 14 $\frac{m}{sec}$ était atteinte, pour la pression de 25·5 cm à une vitesse de 12 $\frac{m}{sec}$, ce qui correspond aux valeurs théoritiques 9·7 $\frac{cm}{sec}$ et 8·2 $\frac{cm}{sec}$.

En même temps l'espect du phénomène changeait: avec la pression atmosphérique d'eau — toute claire jusqu'au moment où la vitesse critique est atteinte — devient trouble au delà, ce qui provient du dégagement d'une quantité de toute petites bulles d'air, mais avec l'emploi des pressions basses il s'y forvent des bulles grandes, comme dons de l'eau bouillante.

On pourrait s'attendre à trouver la vitesse d'efflux indépendante de la pression en amont p_1, pourvu que la vitesse critique soit atteinte, puisqu'alors la pression à la sortie de l'orfice aurait toujours la même valeur, zéro. Mais cette conclusion n'a pas été véri-

fie par expérience, au contraire, on constatait toujours un accroissement de vitesse par suite de l'augmentation de la pression p_1.

Les causes de cette divergeance et des différences entre les valeurs calculées et observées des vitesses critiques sont sans doute les mêmes: d'une part le caractère instable, oscillatoire du phénomène et d'autre part la viscosité du liquide, qui défie tous les calcus basés sur l'abstraction des liquides idéals.

V.

Nous résumerons les conclusions défiinitives de ces expériences:

Le phénomène de Helmholtz, c'estàdire la rupture de la masse liquide quittant une petite ouverture, peut avoir lieu, en réalité, si la vitesse dépasse une valeur considérable (une vingtaine de mètres [1]), mais c'est un phénomène secondaire, qui n'a rien à faire avec la formation des veines d'efflux mêmes, qui peut commencer à des vitesses plus que cent fois plus petites.

D'ailleurs les expériences ne servent pas tout bien entendu, à confirmer l'hypothèse des surfaces de discontinuité de vitesse, qui nous parait inadmissible pour des raisons expliquées au commencement. En général, la théorie de Helmholtz est très intéressante, sans doute, au point de vue théorique, puisqu'elle démontre la possibilité de tels phénomènes dans les liquides idéals, mais son application aux liquides réels n'est nullement justifiée, même pour des vitesses aussi grandes que celles que l'on a considées, ce que démontre le fait de l'intermittence [2]) du phénomène et le désaccord du calcul des vitesses et de l'observation directe.

Il semble que c'est un cas analogue à celui du mouvement des corps plongés dans un liquede, où les calculs basés sur l'hypothèse des liquides parfaits, et ne tenant pas compte ni de la dissipation de l'énergie ni de l'adhésion aux parois, aboutissent à des conclusions tout-à-fait incorrectes.

En outre, il faut remarquer que les solutions spécieles, trouvées jusqu'ici d'après cette méthode, exigent toutes des valeurs définies de la vitesse d'efflux pour une pression p_2 donnée, et ne répondent

[1]) Sans doute des vitesses beaucoup plus grandes encore seront nécessaires dans de l'eau purgée d'air.

[2]) En connexion, sans doute, avec les „mouvements turbulens" et la formation du son dans les tuyaux.

pas à la question de savoir ce qui arrive, si cette vilesse change par suite d'un changement de la pression p_1 (en amont de l'orifice).

Quant à la formation des veines d'efflux, les expériences ont prouvé que les lois de la similitude dynamique s'y appliquent parfaitement, ce que est un argument important en fovenr de notre explication, qui réduit le phénomène aux lois ordinaires des liquides visqueux, notamment aux effets d'inertie s'accentuant à mesure de la rapidité du mouvement effets par rapport aux de la viscosité du liquide.

Cette similitude dynamique donne le moyen de prédire la forme des lignes de flux d'après les fig. 3, 4, 5, 6, pour des liquides à densité et viscosité quelconque; de même il est facile d'en déduire l'influence des dimensions de l'orifice, à savoir: les vitesses correspondantes seront en proportion inverse aux dimensions et par conséquent, la veine se formera plutôt avec un orifice grand que petit [1]).

Cependant, l'explication donnée ne peut pas encore être considérée comme complete. Ce qui reste à faire, c'est la calcule théoretique des lignes de flux au moyen de cette théorie, et c'est là un problème sur lequel j'espère revenir dans l'avenir.

Laboratoire de physique à l'université de Léopol.

00\. M. M. KOWALEWSKI. **Studya helmintologiczne, część VIII. O nowym tasiemcu: Tatria beremis, gen. nov., sp. nov.** ***(Helmithological Studies, part VIII. On a new tapeworm: Tatria biremis, gen. nov., sp. nov.).*** *(Études helminthologiques VIII. Sur un nouveau ténia: Tatria beremis gen. nov., sp. nov.* Mémoire présenté par M. L. Kulczyński m. c.

(Planches IX, X.)

The author describes in this paper a new representant of the subfamily Acoleïnae Fuhrm., found by him in the intestine of a Podiceps auritus in Dublany (Galicia; Mai, 1903). Of the four genera, belonging to this group of tapeworms (4, p. 376), the genus Acoleus Fuhrm. bears the most resemblance to the tapeworm, mentioned abofe. Such difference howefer as absence of the lateral

[1]) C'est probable que l'épaisseur de la parois et la forme du vaisseau seront indifférantes, jusqu'à une certaine limite.

appendages of the proglottides, a great number (40—130) of testicles and in the first place the absence of a vaginal canal of the receptaculum seminis etc. in Acoleus does not allow to place the worm in question in this genus, wherefore the author proposes for it a new genus: Tatria. An accurate and critical analysis of the descriptions of two other tapeworms very similar to the tapeworm found by the author, namely Taenia acanthorhyncha Wedl 1855 and Taenia scolopendra Diesing 1856, and especially of the drawings adjoined to them in the papers of Wedl (8, p. 18, Tab. II, Fig. 19—22), Diesing (2, p. 35, Tab. VI, Fig. 22—27) and Krabbe (6, p. 304, Tab. VIII, Fig. 170—171) shows, that both the forms also must belong to the same genus. There is the diagnosis of this genus given by the author:

Tatria gen. nov. Proglottides with lateral appendages (Fig. 1, 2). Rostellum armed on its apex with a crown of few larger hooks and on its surface with many rings of little hooks. Genital organs single. Testicles not numerous (7 ?). Two seminal vesicles. Male genital opening regularly alternate (Fig. 1, 2, 7, 8, 9, 10). Receptaculum seminis in the middle axis of the proglottis (Fig. 9, 10, 12). Exterior end of its vaginal canal enters into the next posterior proglottis and joins there with receptaculum seminis of this proglottis (Fig. 9), forming in this manner a way for passing spermatozoons from one to another proglottis: a very important circumstance in case, if any of the proglottides were not fertilized immediately! Occurs in two different forms, as forma major (Fig. 2) and forma minor (Fig. 1). Hosts: Urinatores.

The new species of this new genus is characterized as follows:

Tatria biremis sp. nov. Maximal total length of body — 1,9 mm., maximal breadht — 0,7 mm. Length of rostellum (Fig. 3) about 0,41 mm. Number of hooks (Fig. 4) on its apex — 10. Their length — 0,044 — 0,050 mm. Number of rings (Fig. 3) of little hooks (long 0,004 mm.; Fig. 6) circa 30. Suckers and the posterior half of the head covered with minute spines (about 0,0012 mm. long; Fig. 5). Maximal number of proglottides 30, last 1—4 of them only include oncosphaers with hooks. Number of testicles — 7 (Fig. 8, 10). Receptaculum seminis near the anterior border of the proglottis (Fig. 9, 10, 12). Longer diameter of oval embryo (Fig. 21) — 0,02 mm. Length of embryonal hooks — 0,008 mm. Host: Podiceps auritus Lath.